Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MA1116
Tercer Examen Parcial (Agosto-Septiembre 2006)
Turno 8:30

Nombre:____________________

Carnet:_____________________

1.- Sea $T : IR^5 \to IR^4$ definida para todo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in IR^5$ por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \end{pmatrix}$$

i) Encuentre una matriz A_{4x5} que satisfaga $T(v) = A\,v$ para todo $v \in IR^5$.
ii) Pruebe que T es una transformación lineal.
iii) Determine r(T).
iv) Encuentre una base de IM(T).
v) Determine n(T).
vi) Encuentre una base de N(T).

(14 puntos)

Respuesta:

i) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in IR^5 \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \end{pmatrix} =$

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, de donde la matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ii) $\forall \in$ $u_1, u_2 \in IR^5$ y $r \in$ IR, $T(u_1 + ru_2) = A(u_1 + ru_2) = Au_1 + r\,Au_2 = T(u_1) + rT(u_2)$, se sigue que T es una transformación lineal. (Resulta $A = A_T$)

iii) r(t) = dim(IM(T)), pero IM(T) = IM(A), de donde r(T) = r(A) = dim (IM(A)) = dim(C_A) = dim(F_A). Ahora bien, las dos primeras filas de A son l.i. (ninguna es múltiplo de la otra) pero el resto de las filas son todas múltiplos de la primera, así que r(T) = dim (F_A) = 2.

iv) Como r(T) = 2 y dado que IM(T) = IM(A) = C_A, basta encontrar dos columnas l.i. de A. La primera y segunda columnas de A son l.i., pues ninguna es múltiplo de la otra, luego una base de IM(T) puede ser $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

v) r(T) + n(T) = dim(IR^5) = 5 y r(T) = 2 $\Rightarrow$ n(T) = 3.

vi) Para encontrar una base N(T) se debe resolver el sistema homogéneo $Ax = 0_{4x1}$, pero las dos últimas filas de A son múltiplos de la primera, así que dan lugar a ecuaciones equivalentes a la que la primera fila de A origina. Para determinar N(T) se debe entonces resolver el sistema $A'x = 0_{2x1}$, en donde A' es la matriz que tiene las dos primeras filas de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_2 = \quad x_3 + \ x_4 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in N(T) \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y una base de N(T) es:}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2.- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Diagonalice A, de ser posible, ortogonalmente. (dato: $p_A(x) = - x (x - 4)^3$)

(12 puntos)

Respuesta:

La matriz A es simétrica, por lo tanto es ortogonalmente diagonalizable.

Los valores propios de A son: $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 4$.

$E_{\alpha_1} = E_0 = N(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \to f_2 - f_3]{f_1 \leftrightarrow f_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 \to f_3 + f_1 \\ f_4 \to f_4 - 3f_1 \\ \to \\ f_2 \to \left(1/4\right) f_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to f_1 - f_2 \\ f_4 \to f_4 + 4f_2 \\ \to \\ f_3 \to \left(1/4\right) f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to f_1 - 2f_3 \\ f_2 \to f_2 + f_3 \\ \to \\ f_4 \to f_4 + 8f_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -w \\ y = -w \\ z = -w \end{cases} \text{ y } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w \\ -w \\ -w \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y una}$$

base de E_0 es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$E_{\alpha_2} = E_4 = N(A - 4I)$:

$$A - 4\,I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{todas las filas son} \\ \text{múltiplos de la primera} \\ \to \cdots \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$w = x + y + z$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in E_8 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x+y+z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y una base de E_4 es: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Se ortonormaliza la base de E_4 según G-Sch.:

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = u_2 - \left(\dfrac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, se puede tomar $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_3 = u_3 - \left(\dfrac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 - \left(\dfrac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, se puede tomar

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, resulta $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ una base ortogonal de IR^4, compuesta por vectores propios de A y dividiendo cada vector de esta base entre su norma es

$\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ -3/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}$ una base ortonormal de IR^4 compuesta por vectores propios de A. Tomando $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 2/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 0 & -3/2\sqrt{3} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$, se tiene

$$Q^tAQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3.- Sean $H = \{ (x, y, z) \in IR^3 / x - y + 2z = 0 \}$, $u = (-1, 1, 2)$ y $v = (-1, 1, 1)$ vectores de IR^3.

i) Calcule $Proy_H u$

ii) Exprese $v = Proy_H v + Proy_{H^\perp} v$

(10 puntos)

Respuesta:

i) H es un plano, $H^\perp$ es la recta generada por el vector normal al plano H, es decir $H^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si denotamos con la letra $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces

$$Proy_{H^\perp} u = \left(\frac{v \cdot h}{h \cdot h}\right) h = \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \text{ y } Proy_H u = u - Proy_{H^\perp} u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

ii) v pertenece al plano H, de donde $Proy_{H^\perp} v = 0_{3x1}$ y despejando $Proy_H v$ de la igualdad $v = Proy_H v + Proy_{H^\perp} v$, resulta $Proy_H v = v$, así que $v = v + 0$ es la descomposición pedida.

4.- Sea A una matriz nxn. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) Cero no es valor propio de A.

ii) El sitema $A x = 0_{nx1}$ tiene sólo la solución trivial.

(4 puntos)

Respuesta:

Primero recordamos la definición de valor propio de una matriz: Un escalar α es valor propio de una matriz cuadrada A_{nxn}, si existe un vector no nulo en IR^n tal que $Av = \alpha v$.
Cero no es valor propio de $A \Leftrightarrow \forall v \in IR^n \setminus \{0_{nx1}\}$ $Av \neq 0v = 0_{nx1} \Leftrightarrow$ El sistema $Ax = 0_{nx1}$ tiene sólo la solución trivial.